DIE TORSION GERADER STÄBE, DEREN QUERSCHNITTE DURCH ZWEI EXZENTRISCHE KREISE ODER DURCH ZWEI KONFOKALE LEMNISKATEN GEBILDET WERDEN

*

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT ROSTOCK
VORGELEGT VON

DIPL.-ING. PAUL FRIEDRICH WIEDOW
VERMESSUNGSASSESSOR
AUS SCHWERIN I. M.

*

1925

Referent: Professor Dr. phil. Ernst Pohlhausen

Druck von August Pries in Leipzig

Die vorliegende Arbeit behandelt die Torsion eines geraden Stabes, der durch ein Torsionsmoment um die Stabachse beansprucht wird. Der Querschnitt dieses Stabes soll erstens durch einen exzentrischen Kreisring, zweitens durch zwei konfokale Lemniskaten gebildet werden, so daß durch den Kreisring ein Querschnitt mit einem, durch die beiden Lemniskaten ein solcher mit zwei Hohlräumen dargestellt wird.

Die Lösung dieser beiden Aufgaben als ebene Probleme kommt bekanntlich darauf hinaus, eine Funktion $F\ (y,\ z)$ zu bestimmen, die in dem Bereich zwischen den beiden Begrenzungskurven der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-2G\vartheta\,,$$

und die auf den begrenzenden Kurven konstante Werte annimmt. Dabei bedeutet G den Schubmodul des Stabmaterials, ϑ den auf die Längeneinheit des Stabes bezogenen Verdrehungswinkel. Die y, z-Ebene ist dabei senkrecht zur Stabachse. Die im Stabquerschnitt auftretenden Schubspannungen sind dann gegeben durch:

$$\tau_y=\frac{\partial F}{\partial y}\,;\qquad \tau_z=-\frac{\partial F}{\partial z}\,.$$

Das die Verdrehung ϑ erzeugende Moment M ist zu berechnen aus:

$$M=-\iint\limits_{\text{Querschnitt}}\left(y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}\right)dy\,dz\,.$$

Die ausführliche Ableitung und Begründung dieser Gleichungen findet man in dem Buche über „Drang und Zwang“ von A. und L. Föppl[1]). Es wird dort auch eine Lösung der Aufgabe mit dem Kreisring gegeben, die jedoch nur für schwach exzentrische Querschnitte gültig ist. Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, diese Lösung auch für große Exzentrizität soweit exakt durchzurechnen, daß die Lösung geeignet ist zur Abschätzung der Genauigkeit der in der technischen Mechanik für diese Aufgabe üblichen „Näherungs“-Lösung, sowie überhaupt die Spannungsverhältnisse in einem Querschnitt mit

1) München 1920, 2. Band, § 70ff.

zwei Hohlräumen erkennen zu lassen. Die Anregung zu dieser Arbeit verdankt der Verfasser Herrn Professor Dr. Pohlhausen, dem auch an dieser Stelle für seine Förderung ein warmer Dank ausgesprochen werden soll.

Ist z. B. bei einem exzentrischen Kreisringquerschnitt der Radius des inneren Begrenzungskreises gleich der Hälfte des Radius des äußeren, so erhält man folgende Gegenüberstellung:

$$\vartheta = \zeta \cdot \varrho \cdot \frac{M}{\pi \cdot G \cdot a^4}.$$

	Exakte Lösung	Näherungslösung
$e = 0$	$\zeta = 2{,}133$	$\zeta = 2{,}133$
$0{,}125a$	2,182	2,204
$0{,}25a$	2,354	2,462
$0{,}375a$	2,777	3,224
$0{,}4875a$	4,513	9,601

Dabei bezeichnet a den Radius des äußeren Begrenzungskreises und e den Abstand der Kreismittelpunkte. Die folgenden Figuren zeigen den Verlauf der Spannungsfunktion F. Dabei wurde $a = 8$ gewählt.

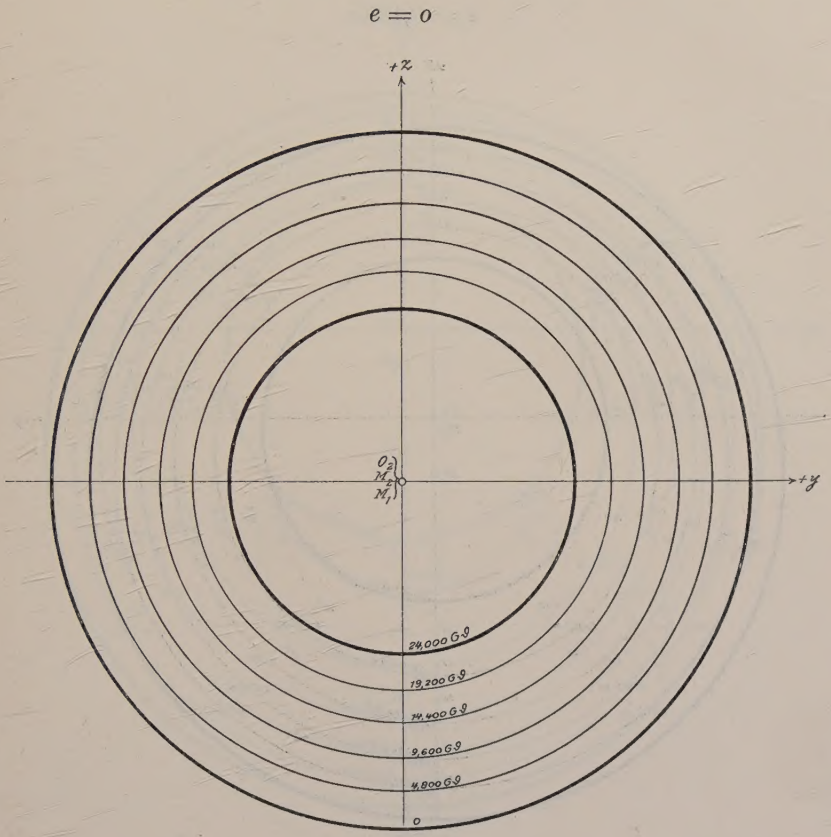

Fig. 1.

$$e = 0{,}125a$$

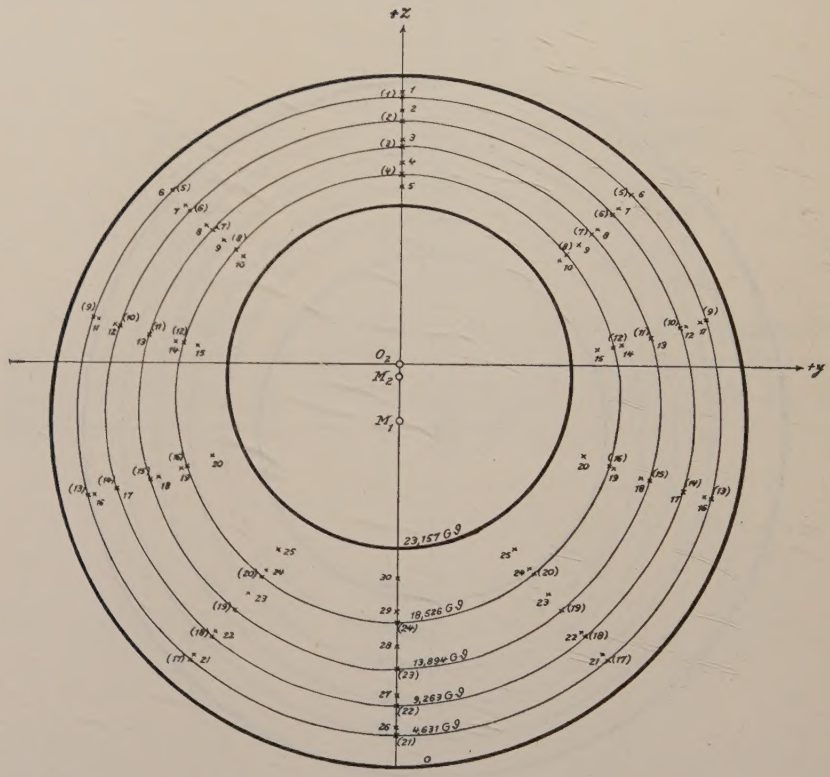

Fig. 2.

$$e = 0{,}25\,a$$

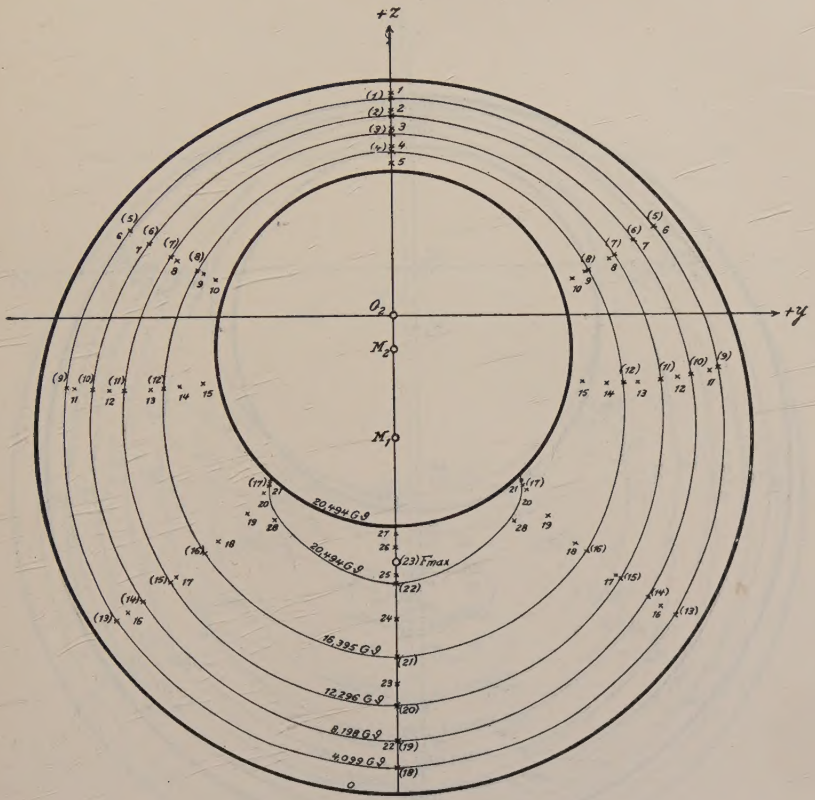
+z
+y
O_2
M_2
M_1
20.494 G.ϑ
20.494 G.ϑ
(23) Fmax
16.395 G.ϑ
12.296 G.ϑ
8.198 G.ϑ
4.099 G.ϑ
0

Fig. 3.

$$e = 0{,}375a$$

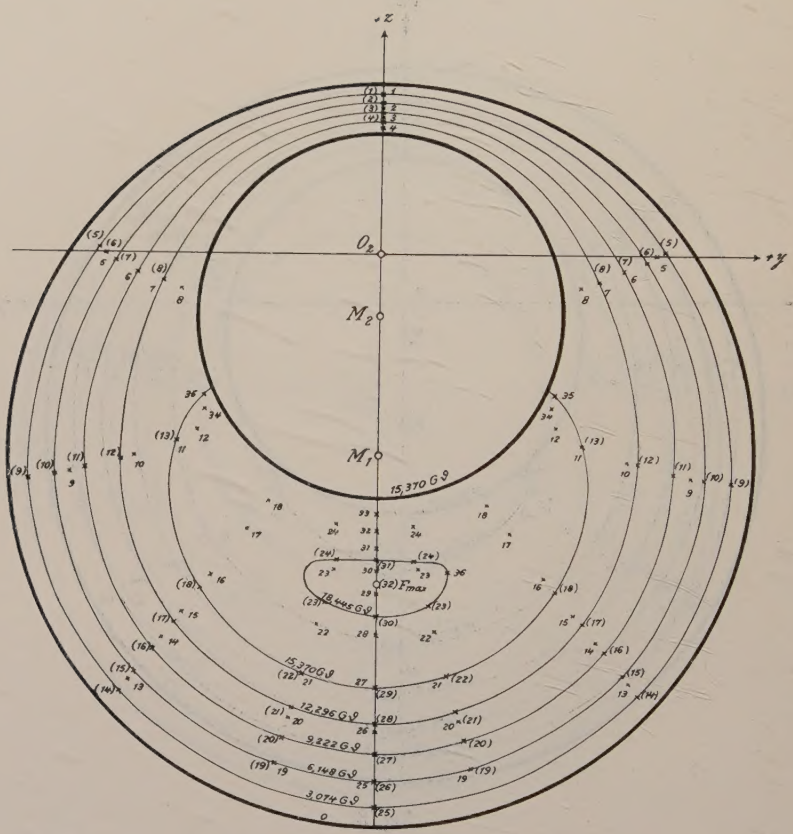
+z
+y
O_2
M_2
M_1
15,370 G.g
18,445 G.g
15,370 G.g
12,296 G.g
9,222 G.g
6,148 G.g
3,074 G.g
0
F_{max}

Fig. 4.

$$e = 0{,}4875a$$

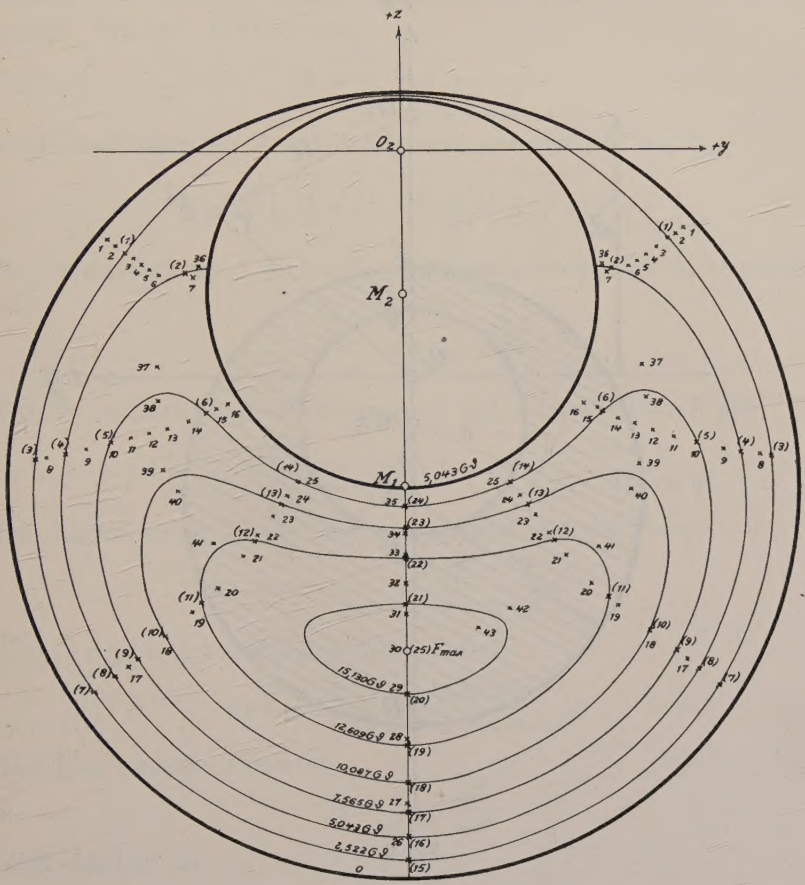

Fig. 5.

I. Torsion eines geraden Stabes, dessen Querschnitt durch einen exzentrischen Kreisring gebildet wird.

a) Koordinatensystem.

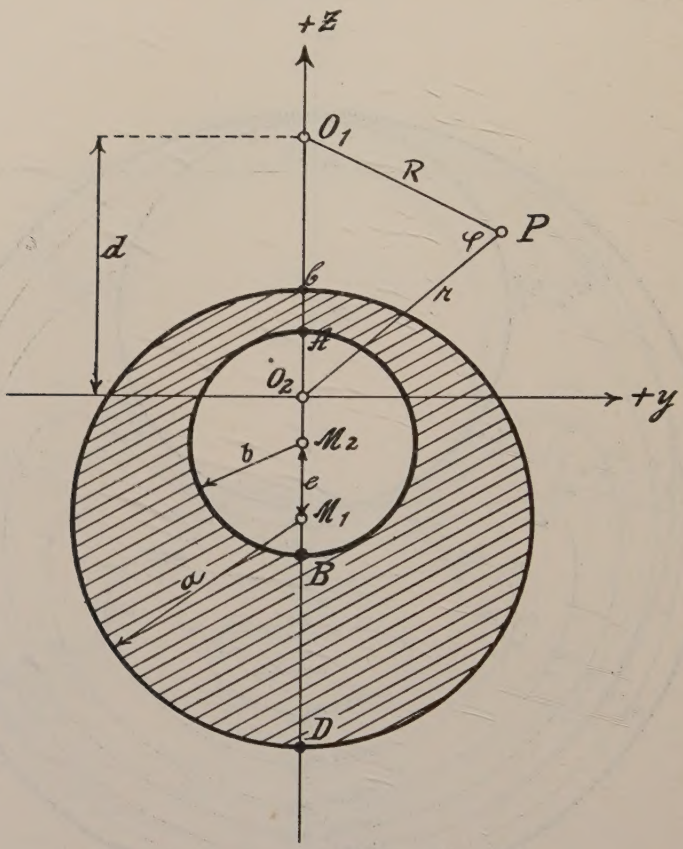

Fig. 6.

Zur Durchführung der Aufgabe benutzen wir ein Dipolar-Koordinatensystem. Seine Pole O_1 und O_2 liegen auf der Zentrale der Begrenzungskreise des Querschnitts und sind harmonisch zu den Punktepaaren A, B und C, D (vgl. Abb. 6). Die Lage eines beliebigen Punktes P legen wir fest durch den Winkel φ und den Parameter

$$\lambda = \frac{R}{r}.$$

Für die Punkte des äußeren Begrenzungskreises ist $\lambda = \text{const.}\ \lambda_1$, für die des inneren $\lambda = \text{const.}\ \lambda_2$. Für die Punkte λ, φ des schraffierten Bereichs gilt:

$$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2 \text{ und } O \leqq \varphi \leqq 2\pi .$$

Wir nennen den Radius des äußeren Begrenzungskreises unseres Querschnitts a, den des inneren b. e bezeichnet den Abstand der Mittelpunkte. Mit den Abkürzungen

$$\beta = \frac{b}{a} \text{ und } \varepsilon = \frac{e}{a}$$

erhält man dann für den Polabstand d zwischen O_1 und O_2:

$$d = \frac{a}{\varepsilon}\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - \beta^2}\cdot\sqrt{(1+\varepsilon)^2 - \beta^2} .$$

Die Parameterwerte λ_1 und λ_2 der Begrenzungskreise sind zu berechnen aus:

$$\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{d}{a} \text{ und } \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{d}{b} .$$

Für die rechtwinkligen Koordinaten y und z des Punktes P gilt:

$$y = d\frac{\lambda \sin\varphi}{1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi} \text{ und } z = d\frac{1-\lambda\cos\varphi}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi} .$$

Das Linienelement ds der Begrenzungskreise hat die Form:

$$ds = d\frac{\lambda d\varphi}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi} .$$

Ferner ergibt sich für das Flächenelement:

$$dy\,dz = d^2\frac{\lambda d\lambda d\varphi}{(1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi)^2} .$$

Der Laplacesche Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

wird erhalten zu:

$$\Delta = \frac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi)^2}{d^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) .$$

Die ersten Differentialparameter lauten:

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi}{d}\right)^2 ;$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi}{d\cdot\lambda}\right)^2 .$$

Wir merken schließlich noch an:

$$y\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}(1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi);$$

$$y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}(1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi).$$

b) Bestimmung der Spannungsfunktion F.

Unsere Aufgabe erheischt nun die Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}=-2G\vartheta.$$

Auf den Begrenzungskreisen muß F konstante Werte annehmen. Wir führen ein:

$$\Omega=\frac{2F}{G\vartheta}.$$

und erhalten:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=-4.$$

Auf den Begrenzungskreisen muß auch Ω konstante Werte annehmen. Wir setzen fest

$$\text{für } \lambda=\lambda_1:\Omega=0$$
$$\lambda=\lambda_2:\Omega=c\cdot d^2,$$

wobei c eine noch freibleibende Konstante ist.

Wir setze ann:

$$\Omega=d^2\cdot\mathfrak{f}(y,z)-(y^2+z^2)=d^2\left[\mathfrak{f}(\lambda,\varphi)-\frac{1}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi}\right]$$

und erhalten

$$\text{für } \mathfrak{f}(y,z):\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial z^2}=0,$$

$$\text{oder für } \mathfrak{f}(\lambda,\varphi):\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\delta\varphi^2}=0.$$

Die Randbedingungen für Ω werden erfüllt, wenn

$$\text{für } \lambda=\lambda_1:\mathfrak{f}=\left(\frac{y^2+z^2}{d^2}\right)_{\lambda=\lambda_1}=\frac{1}{1+{\lambda_1}^2-2\lambda_1\cos\varphi},$$

$$\text{für } \lambda=\lambda_2:\mathfrak{f}=c+\left(\frac{y^2+z^2}{d^2}\right)_{\lambda=\lambda_2}=c+\frac{1}{1+{\lambda_2}^2-2\lambda_2\cos\varphi}$$

wird.

Wir genügen der Differentialgleichung durch den Reihenansatz

$$\mathfrak{f} = A_0 + B_0 \ln\lambda + \sum_1^{\infty}(A_n\lambda^n + B_n\lambda^{-n})\cos n\varphi + \sum_1^{\infty}(C_n\lambda^n + D_n\lambda^{-n})\sin n\varphi.$$

Die Konstanten $A \ldots D$ wählen wir so, daß die Randbedingungen erfüllt werden. Zu diesem Zwecke setzen wir die Reihenentwicklung an:

$$\pi\cdot\frac{1}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi} = \frac{1}{2}a_{0(\lambda)} + \sum_1^{\infty}a_{n(\lambda)}\cos n\varphi$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleichung die Bedingungen:

$$\begin{aligned} A_0 + B_0 \ln\lambda_1 &= \frac{1}{2}a_{0(\lambda_1)} \\ &\vdots \\ A_n\lambda_1^n + B_n\lambda_1^{-n} &= a_{n(\lambda_1)} \\ \text{und:}\quad A_0 + B_0\ln\lambda_2 &= c + \frac{1}{2}a_{0(\lambda_2)} \\ &\vdots \\ A_n\lambda_2^n + B_n\lambda_2^{-n} &= a_{n(\lambda_2)} \end{aligned}$$

Die C_n und D_n ergeben sich gleich Null, da in der Entwicklung von

$$\pi\cdot\frac{1}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi}$$

keine Sinusglieder auftreten können.

Es ergeben sich durch komplexe Integration:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi} = \frac{2}{\lambda^2-1};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi} = \frac{2}{\lambda^n(\lambda^2-1)}.$$

Wir erhalten damit:

$$A_n\lambda_1^n + B_n\lambda_1^{-n} = \frac{2}{\lambda_1^n(\lambda_1^2-1)};$$

$$A_n\lambda_2^n + B^n\lambda_2^{-n} = \frac{2}{\lambda_2^n(\lambda_2^2-1)};$$

und daraus:

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1^{2n} - \lambda_2^{2n}} \left(\frac{1}{\lambda_1^2 - 1} - \frac{1}{\lambda_2^2 - 1} \right);$$

$$B_n = -\frac{2}{\lambda_1^{2n} - \lambda_2^{2n}} \left(\frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_1^2 - 1} - \frac{\lambda_1^{2n}}{\lambda_2^2 - 1} \right).$$

Ferner finden wir:

$$B_0 = 0; \; A_0 = \frac{1}{\lambda_1^2 - 1}; \; c = \frac{1}{\lambda_1^2 - 1} - \frac{1}{\lambda_2^2 - 1}.$$

Daß die Konstante B_0 gleich Null ist, ergibt sich folgendermaßen. Es besteht die Gleichung (vgl. Föppl)

$$\oint_{\text{innere Begr.}} \tau \, ds = 2 G \vartheta \cdot \text{Fläche des inneren Kreises } S_0.$$

Da nun

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

und längs der Begrenzung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

ist, so erhält man:

$$\tau = \frac{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos\varphi}{d} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{G\vartheta}{2} \cdot \frac{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos\varphi}{d} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{G\vartheta}{2} \cdot d \left[(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos\varphi) \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda} + \frac{2(\lambda_1 - \cos\varphi)}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos\varphi} \right]$$

und

$$\tau \, ds = \frac{G\vartheta}{2} \cdot d^2 \left[\lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda} + 2\lambda_1 \frac{\lambda_1 - \cos\varphi}{(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos\varphi)^2} \right] d\varphi.$$

Nun ist:

$$\lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda} = B_0 + \sum_1^{\infty} n (A_n \lambda_1^n - B_n \lambda_1^{-n}) \cos n\varphi,$$

und es ergibt sich:

$$\frac{G\vartheta}{2} \cdot d^2 \int_0^{2\pi} \left[B_0 + \sum_1^{\infty} n (A_n \lambda_1^n - B_n \lambda_1^{-n}) \cos n\varphi \right.$$

$$\left. + 2\lambda_1 \frac{\lambda_1 - \cos\varphi}{(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos\varphi)^2} \right] d\varphi = 2 G \vartheta S_0.$$

Es ist aber:

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos\varphi)^2} = \frac{2\pi(\lambda_1^2+1)}{(\lambda_1^2-1)^3};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{(1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos\varphi)^2} = \frac{4\pi\lambda_1}{(\lambda_1^2-1)^3}.$$

Hiermit erhalten wir:

$$2\pi B_0 + 4\pi\lambda_1^2 \frac{(\lambda_1^2+1)}{(\lambda_1^2-1)^3} - \frac{8\pi\lambda_1^2}{(\lambda_1^2-1)^3} = 4\cdot\frac{S_0}{d^2} = 4\pi\cdot\frac{b^2}{d^2};$$

$$B_0 = 2\cdot\frac{b^2}{d^2} - 2\cdot\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1^2-1)^2}.$$

Da nun aber

$$\frac{b}{d} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-1}$$

ist, wird $B_0 = 0$.

c) Das Moment der Schubspannungen um die Stabachse.

Dieses Moment hat den Wert:

$$M = -\iint_{\text{Stabquerschnitt}} \left(y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} \right) dy\,dz,$$

oder:

$$M = -\frac{G\vartheta}{2}\iint \left(y\frac{\partial \Omega}{\partial y} + z\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) dy\,dz.$$

Es ist

$$y\frac{\partial \Omega}{\partial y} + z\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\left(y\frac{\partial \lambda}{\partial y} + z\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\left(y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

so daß sich ergibt:

$$M = +\frac{G\vartheta}{4} d^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) \lambda \frac{d\lambda\, d\varphi}{w^2},$$

worin zur Abkürzung

$$w = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi$$

geschrieben wurde. Mit

$$\Omega = d^2\left[\mathfrak{f}(\lambda,\varphi) - \frac{1}{w}\right]$$

erhalten wir also:

$$4\frac{M}{G\vartheta d^4} = +\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\right)\lambda\frac{d\lambda d\varphi}{w^2}$$

$$+\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2\right]\lambda\frac{d\lambda d\varphi}{w^4}.$$

Da nun

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2 = 4w$$

ist, so reduziert sich das zweite Doppelintegral auf:

$$4\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\lambda\frac{d\lambda d\varphi}{w^3} = 2\pi\left[\frac{\lambda_2^2(\lambda_2^2+2)}{(\lambda_2^2-1)^4} - \frac{\lambda_1^2(\lambda_1^2+2)}{(\lambda_1^2-1)^4}\right].$$

Das erste Doppelintegral formen wir folgendermaßen um:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}\lambda\frac{d\lambda d\varphi}{w^2} = \int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{1}{w}\lambda\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}\right)_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}\right)d\lambda\right]d\varphi;$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\frac{d\lambda d\varphi}{w^2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\left(-\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\right)_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\right)d\varphi\right]d\lambda.$$

Nun ist:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}\right)d\lambda d\varphi + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\right)d\lambda d\varphi =$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda}{w}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\varphi^2}\right)d\lambda d\varphi = 0,$$

weil ja $\mathfrak{f}(\lambda, \varphi)$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\varphi^2} = 0$$

genügt. Ferner enthält $\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}$ nur Sinusglieder. Daher ist

$$\left(-\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}\right)_0^{2\pi} = 0\,.$$

Es bleibt also vom ersten Doppelintegral nur übrig:

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{w}\lambda\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\varphi\,.$$

Es ist aber:

$$\lambda\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda} = \sum_1^{\infty} n(A_n\lambda^n - B_n\lambda^{-n})\cos n\varphi;$$

wobei wir berücksichtigen, daß $B_0 = 0$ ist. Damit erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{w}\lambda\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}d\varphi = \sum_1^{\infty} n(A_n\lambda^n - B_n\lambda^{-n})\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\varphi}{w}d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda^2-1}\cdot\sum_1^{\infty} n(A_n\lambda^n - B_n\lambda^{-n})\cdot\frac{1}{\lambda^n}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda^2-1}\cdot\sum_1^{\infty} n(A_n - B_n\lambda^{-2n})\,.$$

Es wird daher:

$$\frac{2M}{\pi\cdot G\vartheta\cdot d^4} = \frac{\lambda_2^2(\lambda_2^2+2)}{(\lambda_2^2-1)^4} - \frac{\lambda_1^2(\lambda_1^2+2)}{(\lambda_1^2-1)^4} + \frac{1}{\lambda_1^2-1}\cdot\sum_1^{\infty} n(A_n - B_n\lambda_1^{-2n})$$

$$- \frac{1}{\lambda_2^2-1}\cdot\sum_1^{\infty} n(A_n - B_n\lambda_2^{-2n})\,.$$

Dafür können wir schreiben:

$$\frac{2M}{\pi\cdot G\vartheta\cdot d^4} = \frac{\lambda_2^2(\lambda_2^2+2)}{(\lambda_2^2-1)^4} - \frac{\lambda_1^2(\lambda_1^2+2)}{(\lambda_1^2-1)^4} + \sum_1^{\infty} nA_n\left(\frac{1}{\lambda_1^2-1} - \frac{1}{\lambda_2^2-1}\right)$$

$$- \sum_1^{\infty} nB_n\left(\frac{\lambda_2^{2n}}{\lambda_1^2-1} - \frac{\lambda_1^{2n}}{\lambda_2^2-1}\right)\cdot\frac{1}{\lambda_1^{2n}\cdot\lambda_2^{2n}}\,.$$

Mit den früher erhaltenen Werten für A_n und B_n ergibt dies:

$$\frac{M}{\pi\cdot G\vartheta\cdot d^4} = \frac{\lambda_2^2(\lambda_2^2+2)}{2(\lambda_2^2-1)^4} - \frac{\lambda_1^2(\lambda_1^2+2)}{2(\lambda_1^2-1)^4} + \left(\frac{1}{\lambda_1^2-1} - \frac{1}{\lambda_2^2-1}\right)^2\cdot\sum_1^{\infty}\frac{n}{\lambda^{2n}-\lambda_2^{2n}}$$

$$+ \frac{1}{(\lambda_1^2-1)^2(\lambda_2^2-1)^2}\cdot\sum_1^{\infty}\frac{n}{\lambda_1^{2n}-\lambda_2^{2n}}\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n(\lambda_2^2-1) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n(\lambda_1^2-1)\right]^2.$$

d) Zahlenbeispiele.

Wir haben den Fall $b = \frac{a}{2}$ für $e = 0$, $e = 0{,}125a$, $e = 0{,}25a$, $e = 0{,}375a$ und $e = 0{,}4875a$ durchgerechnet.

Um den Verlauf der Spannungsfunktion F darzustellen, legen wir durch den Kreisring in Richtung der φ-Koordinate Schnitte und rechnen in diesen an mehreren Stellen λ die zugehörige Spannungsgröße F aus. Dann tragen wir in einer Hilfszeichnung zu den Abszissen λ die zugehörigen Werte F als Ordinaten auf und verbinden diese Punkte durch eine Kurve. Wir gewinnen so ein Bild über die Spannungsverteilung längs dieses Schnittes. Die Spannungsverhältnisse in solchen Schnitten stellen wir alle in derselben Hilfszeichnung dar, so daß wir in dieser mehrere Kurven $\varphi = \text{const.}$ erhalten. Um nun die gesuchten Kurven $F = \text{const.}$ in der Querschnittszeichnung zu finden, haben wir nur nötig, im gewünschten Abstand ΔF von der Abszissenlinie eine Parallele zu dieser zu legen und für die Schnittpunkte mit den Kurven $\varphi = \text{const.}$ die zugehörigen λ-Werte aus der Zeichnung zu ermitteln. Diese Werte φ und λ sind in rechtwinklige Koordinaten umzusetzen, in den Querschnittszeichnungen aufzutragen und durch Kurven zu verbinden.

Die Fig. 7—10 sind diese Hilfszeichnungen. Die Schnittpunkte der Kurven mit den lotrechten Geraden sind die exakt gerechneten Punkte, aus denen die Kurve konstruiert worden ist, und die Schnittpunkte mit den wagerechten Geraden, welche letzteren also die Linien $F = \text{const.}$ vorstellen, sind die interpolierten Punkte. Um die Trennung zwischen diesen beiden Punktarten auch rein äußerlich durchzuführen, wurden in den Figuren die Nummern der interpolierten Punkte im Gegensatz zu den anderen eingeklammert. Es kann noch bemerkt werden, daß es wegen der Symmetrie nur nötig war, den Kreisring von 0 bis π zu betrachten.

In den Fig. 1—5 sind die Kreisringe mit den Spannungslinien dargestellt. Zur besseren Orientierung sind die beiden Punktarten mit denselben Bezeichnungen wie in den Hilfsfiguren auch hier eingetragen. Die eingeklammerten Punkte lagen dort auf den wagerechten Geraden; da diese hier die Spannungslinien sind, müssen die eingeklammerten Punkte auf den Kurven liegen.

In den Tabellen 1—4 sind die Daten für die λ, A_n und B_n angegeben; in den Tabellen 5—8 finden sich die Koordinaten in den beiden Systemen und die Spannungskoten für die exakt berechneten Punkte.

Über die Genauigkeit ist zu sagen, daß die letzte Stelle unsicher ist. In den Tabellen 9—12 schließlich sind dieselben Daten für die interpolierten Punkte zusammengestellt. An den kritischen Stellen fanden zahlreiche Einzeluntersuchungen statt, deren Ergebnisse ebenfalls in den Tabellen 5—8 verzeichnet sind.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß man bei kleiner Exzentrizität die lästige Umwandlung der Dipolarkoordinaten in rechtwinklige Koordinaten durch ein Näherungsverfahren vereinfachen kann. Bei kleinem e wird nämlich das d sehr groß, und wir können angenähert sagen, daß in Fig.. 6 $PO_1 \parallel O_1O_2$ wird. Dann wird $\sphericalangle O_1O_2P = 2R - \varphi$ und $O_2P = \frac{d}{\lambda}$. Wir können also in diesem Fall die Dipolarkoordinaten in Polarkoordinaten verwandeln und diese von O_2 aus mit Transporteur und Maßstab auftragen.

$e = 0{,}125\,a$; $F_{max} = 23{,}157\,G\vartheta$

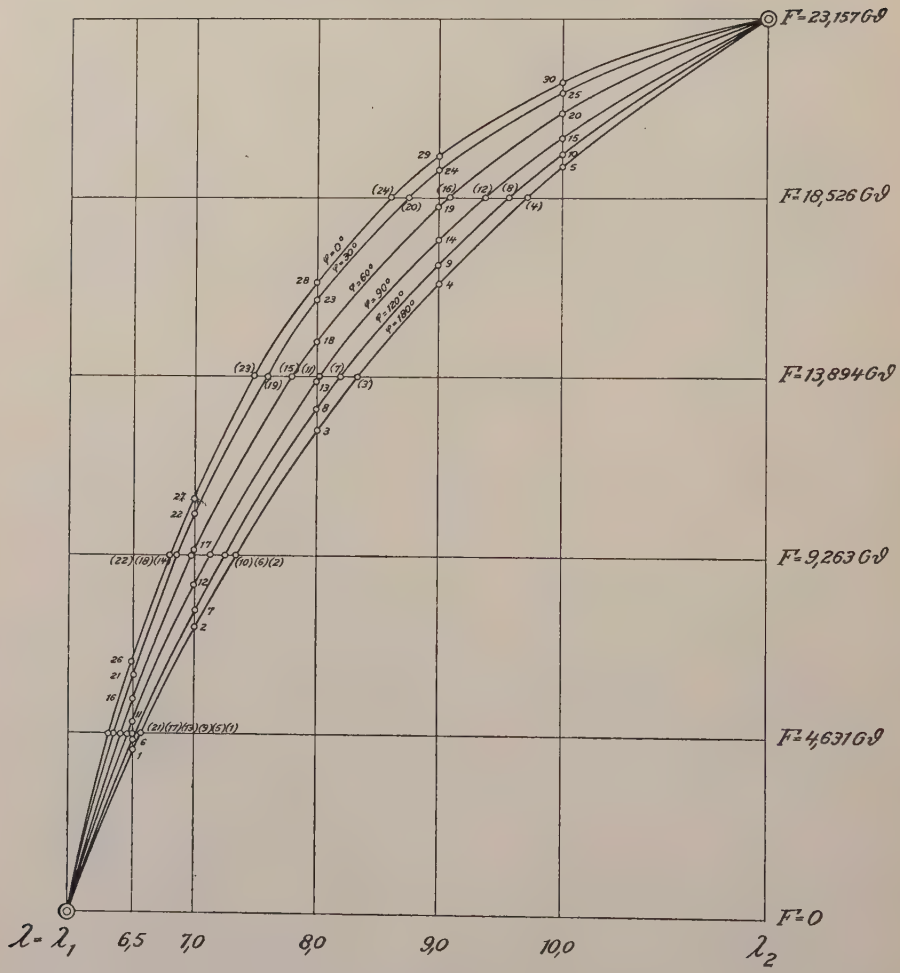

Fig. 7.

$e = 0{,}25\,a$; $F_{max} = 21{,}000\,G\vartheta$

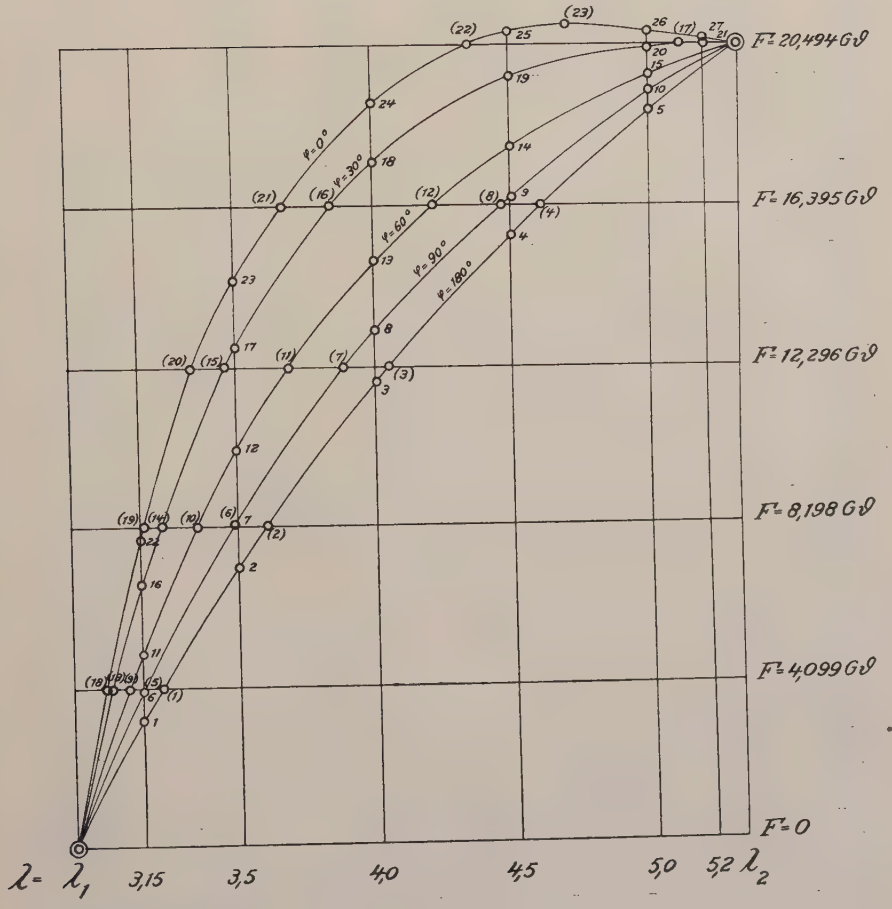

Fig. 8.

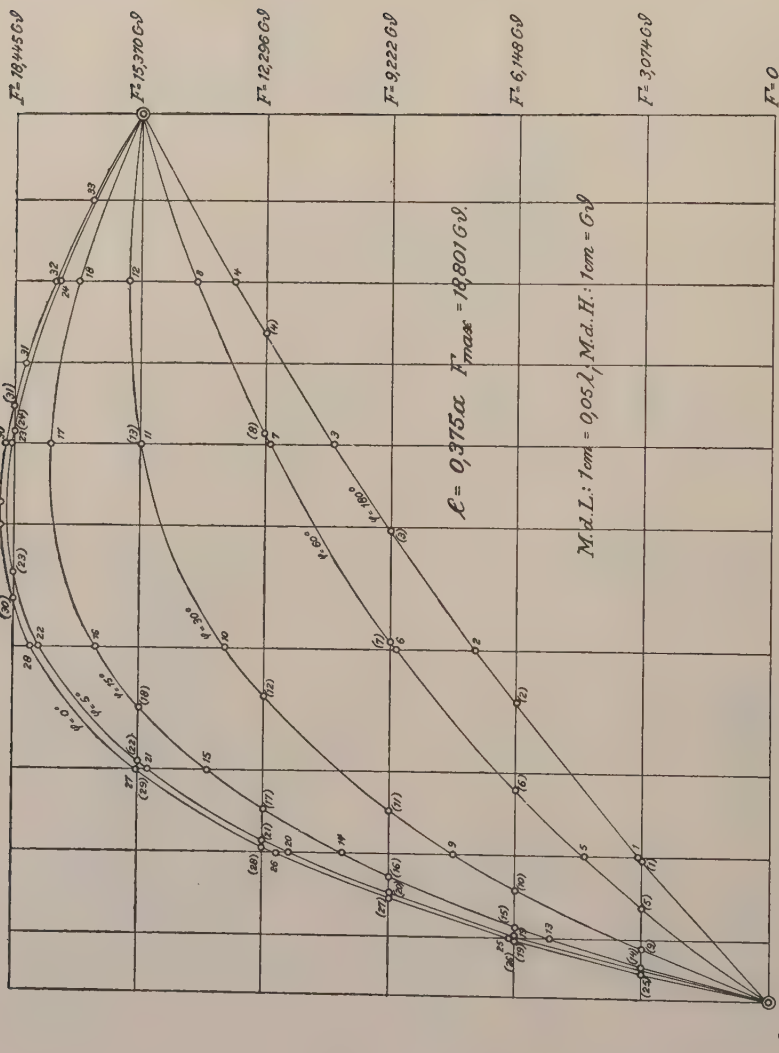

Fig. 9 (verjüngt).

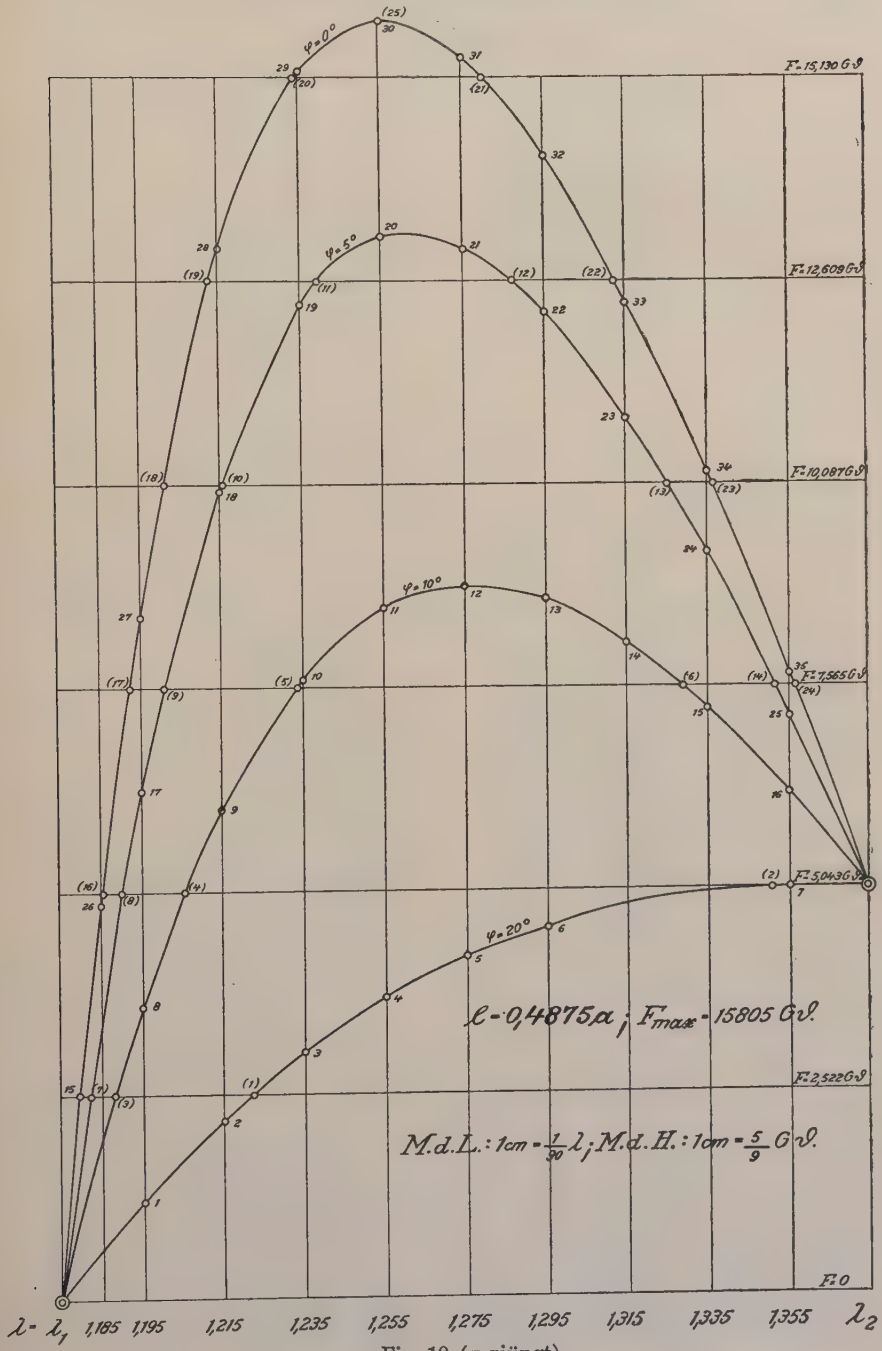

Fig. 10 (verjüngt).

Tabelle 1.

$e = 0{,}125\,a; \qquad b = \frac{a}{2}; \qquad d = 5{,}78925\,a$

$\lambda_1 = 5{,}957134; \qquad \lambda_2 = 11{,}664269$

$A_0 = 28{,}996 \cdot 10^{-3}$	$c = 21{,}592 \cdot 10^{-3}$
$A_1 = -4{,}294 \cdot 10^{-4}$	$B_1 = 73{,}231 \cdot 10^{-3}$
$A_2 = -2{,}504 \cdot 10^{-6}$	$B_2 = 61{,}145 \cdot 10^{-3}$
$A_3 = -1{,}746 \cdot 10^{-8}$	$B_3 = 58{,}773 \cdot 10^{-3}$
$A_4 = -1{,}266 \cdot 10^{-10}$	$B_4 = 58{,}194 \cdot 10^{-3}$
$A_5 = -0{,}928 \cdot 10^{-12}$	$B_5 = 58{,}045 \cdot 10^{-3}$
	$B_6 = 58{,}006 \cdot 10^{-3}$
	$B_7 = 57{,}996 \cdot 10^{-3}$
	$B_8 = 57{,}994 \cdot 10^{-3}$
	$B_9 = 57{,}993 \cdot 10^{-3}$
	$B_n = 57{,}993 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 2.

$e = 0{,}25\,a; \qquad b = \frac{a}{2}; \qquad d = 2{,}56175\,a$

$\lambda_1 = 2{,}905868; \qquad \lambda_2 = 5{,}311738$

$A_0 = 13{,}433 \cdot 10^{-2}$	$c = 9{,}759 \cdot 10^{-2}$
$A_1 = -0{,}987 \cdot 10^{-2}$	$B_1 = 25{,}203 \cdot 10^{-2}$
$A_2 = -2{,}693 \cdot 10^{-4}$	$B_2 = 28{,}787 \cdot 10^{-2}$
$A_3 = -0{,}893 \cdot 10^{-5}$	$B_3 = 27{,}405 \cdot 10^{-2}$
$A_4 = -3{,}105 \cdot 10^{-7}$	$B_4 = 27{,}025 \cdot 10^{-2}$
$A_5 = -1{,}094 \cdot 10^{-8}$	$B_5 = 26{,}914 \cdot 10^{-2}$
$A_6 = -3{,}872 \cdot 10^{-10}$	$B_6 = 26{,}881 \cdot 10^{-2}$
$A_7 = -1{,}371 \cdot 10^{-11}$	$B_7 = 26{,}871 \cdot 10^{-2}$
	$B_8 = 26{,}868 \cdot 10^{-2}$
	$B_9 = 26{,}868 \cdot 10^{-2}$
	$B_{10} = 26{,}867 \cdot 10^{-2}$
	$B_n = 26{,}867 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 3.

$e = 0{,}375\,a; \qquad b = \frac{a}{2}; \qquad d = 1{,}2809\,a$

$\lambda_1 = 1{,}827935; \qquad \lambda_2 = 2{,}905869$

$A_0 = 42{,}709 \cdot 10^{-2}$	$c = 0{,}2928$
$A_1 = -11{,}474 \cdot 10^{-2}$	$B_1 = 1{,}2376$
$A_2 = -9{,}737 \cdot 10^{-3}$	$B_2 = 0{,}9629$

Tabelle 3 (Fortsetzung).

$A_3 = -10{,}367 \cdot 10^{-4}$	$B_3 = 0{,}8929$
$A_4 = -11{,}807 \cdot 10^{-5}$	$B_4 = 0{,}8689$
$A_5 = -13{,}773 \cdot 10^{-6}$	$B_5 = 0{,}8599$
$A_6 = -16{,}214 \cdot 10^{-7}$	$B_6 = 0{,}8564$
$A_7 = -19{,}157 \cdot 10^{-8}$	$B_7 = 0{,}8551$
$A_8 = -22{,}666 \cdot 10^{-9}$	$B_8 = 0{,}8545$
$A_9 = -26{,}833 \cdot 10^{-10}$	$B_9 = 0{,}8543$
$A_{10} = -31{,}774 \cdot 10^{-11}$	$B_{10} = 0{,}8542$
	$B_n = 0{,}8542$

Tabelle 4.

$e = 0{,}3875\,\mathrm{a}$; $\quad \mathrm{b} = \frac{a}{2}$; $\quad d = 0{,}32325\,\mathrm{a}$

$\lambda_1 = 1{,}174629$; $\quad \lambda_2 = 1{,}374258$

$A_0 = 2{,}634$	$c = 1{,}508$
$A_1 = -5{,}929$	$B_1 = 13{,}448$
$A_2 = -1{,}814$	$B_2 = 8{,}721$
$A_3 = -0{,}734$	$B_3 = 7{,}196$
$A_4 = -0{,}3317$	$B_4 = 6{,}470$
$A_5 = -1{,}586 \cdot 10^{-1}$	$B_5 = 6{,}061$
$A_6 = -0{,}784 \cdot 10^{-1}$	$B_6 = 5{,}809$
$A_7 = -0{,}396 \cdot 10^{-1}$	$B_7 = 5{,}645$
$A_8 = -2{,}029 \cdot 10^{-2}$	$B_8 = 5{,}535$
$A_9 = -1{,}049 \cdot 10^{-2}$	$B_9 = 5{,}458$
$A_{10} = -0{,}546 \cdot 10^{-2}$	$B_{10} = 5{,}405$
$A_{11} = -2{,}857 \cdot 10^{-3}$	$B_{11} = 5{,}366$
$A_{12} = -1{,}500 \cdot 10^{-3}$	$B_{12} = 5{,}340$
$A_{13} = -0{,}789 \cdot 10^{-3}$	$B_{13} = 5{,}320$
$A_{14} = -0{,}416 \cdot 10^{-3}$	$B_{14} = 5{,}306$
$A_{15} = -2{,}195 \cdot 10^{-4}$	$B_{15} = 5{,}296$
$A_{16} = -1{,}159 \cdot 10^{-4}$	$B_{16} = 5{,}288$
$A_{17} = -0{,}613 \cdot 10^{-4}$	$B_{17} = 5{,}283$
$A_{18} = -0{,}324 \cdot 10^{-4}$	$B_{18} = 5{,}279$
$A_{19} = -1{,}714 \cdot 10^{-5}$	$B_{19} = 5{,}276$
$A_{20} = -0{,}907 \cdot 10^{-5}$	$B_{20} = 5{,}274$
	$B_n = 5{,}268$

Tabelle 5.

$e = 0{,}125a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\ \vartheta$
1	± 180	6,5	0	+ 6,18	4,186
2		7,0	0	+ 5,79	7,396
3		8,0	0	+ 5,15	12,477
4		9,0	0	+ 4,63	16,318
5		10,0	0	+ 4,21	19,334
6	± 120	6,5	± 5,24	+ 3,96	4,481
7		7,0	± 4,93	+ 3,65	7,844
8		8,0	± 4,40	+ 3,18	13,019
9		9,0	± 3,97	+ 2,80	16,794
10		10,0	± 3,61	+ 2,51	19,660
11	± 90	6,5	± 6,96	+ 1,07	4,896
12		7,0	± 6,48	+ 0,93	8,467
13		8,0	± 5,70	+ 0,71	13,760
14		9,0	± 5,08	+ 0,57	17,435
15		10,0	± 4,59	+ 0,46	20,097
16	± 60	6,5	± 7,09	— 2,83	5,502
17		7,0	± 6,53	— 2,69	9,363
18		8,0	± 5,63	— 2,44	14,803
19		9,0	± 4,95	— 2,22	18,325
20		10,0	± 4,41	— 2,04	20,697
21	± 30	6,5	± 4,71	— 6,70	6,142
22		7,0	± 4,28	— 6,19	10,294
23		8,0	± 3,62	— 5,36	15,857
24		9,0	± 3,14	— 4,74	19,208
25		10,0	± 2,77	— 4,24	21,286
26	0	6,5	0	— 8,42	6,438
27		7,0	0	— 7,72	10,717
28		8,0	0	— 6,62	16,327
29		9,0	0	— 5,79	19,597
30		10,0	0	— 5,15	21,543

Tabelle 6.

$e = 0{,}25a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	λ	$F/G\,\vartheta$
1	± 180	3,15	0	+ 4,94	3,262
2		3,5	0	+ 4,56	7,241
3		4,0	0	+ 4,10	11,879
4		4,5	0	+ 3,73	15,639
5		5,0	0	+ 3,42	18,777
6	± 90	3,15	± 5,91	+ 1,88	3,969
7		3,5	± 5,41	+ 1,55	8,460
8		4,0	± 4,82	+ 1,21	13,177
9		4,5	± 4,34	+ 0,97	16,594
10		5,0	± 3,94	+ 0,79	19,177
11	± 60	3,15	± 7,19	— 1,51	4,982
12		3,5	± 6,37	— 1,58	10,124
13		4,0	± 5,46	— 1,57	14,873
14		4,5	± 4,77	— 1,53	17,806
15		5,0	± 4,23	— 1,46	19,675
16	± 30	3,15	± 5,91	— 6,48	6,709
17		3,5	± 4,99	— 5,79	12,808
18		4,0	± 4,07	— 5,02	17,456
19		4,5	± 3,43	— 4,42	19,586
20		5,0	± 2,96	— 3,94	20,392
21		5,2	± 2,80	— 3,77	20,485
22	0	3,15	0	— 9,53	7,867
23		3,5	0	— 8,20	14,497
24		4,0	0	— 6,83	18,994
25		4,5	0	— 5,86	20,613
26		5,0	0	— 5,12	20,799
27		5,2	0	— 4,88	20,632
28	22,67	4,773	± 2,52	— 4,66	20,416

Tabelle 7.

$e = 0{,}375a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
1	± 180	2,0	0	+ 3,41	3,149
2		2,25	0	+ 3,15	7,143
3		2,5	0	+ 2,93	10,602
4		2,7	0	+ 2,77	13,065
5	± 60	2,0	± 5,92	— 0	4,436
6		2,25	± 5,24	— 0,33	9,026
7		2,5	± 4,67	— 0,54	12,143
8		2,7	± 4,29	— 0,64	13,945
9	± 30	2,0	± 6,67	— 4,88	7,633
10		2,25	± 5,32	— 4,49	13,212
11		2,5	± 4,39	— 4,09	15,323
12		2,7	± 3,83	— 3,79	15,691
13	± 15	1,9	± 5,36	— 9,11	5,297
14		2,0	± 4,67	— 8,40	10,393
15		2,1	± 4,12	— 7,79	13,672
16		2,25	± 3,48	— 7,01	16,401
17		2,5	± 2,74	— 5,99	17,566
18		2,7	± 2,33	— 5,37	16,882
19	± 5	1,9	± 2,06	— 11,09	6,099
20		2,0	± 1,76	— 10,02	11,728
21		2,1	± 1,53	— 9,12	15,168
22		2,25	± 1,27	— 8,05	17,812
23		2,5	± 0,98	— 6,73	18,525
24		2,7	± 0,83	— 5,95	17,384
25	0	1,9	0	— 11,38	6,216
26		2,0	0	— 10,25	11,916
27		2,1	0	— 9,32	15,381
28		2,25	0	— 8,20	18,011
29		2,4	0	— 7,32	18,782
30		2,5	0	— 6,83	18,656
31		2,6	0	— 6,40	18,184
32		2,7	0	— 6,03	17,451
33		2,8	0	— 5,70	16,520
34	± 33,0	2,829	± 3,71	— 3,30	15 461
35	± 35,5	2,861	± 3,76	— 3,01	15,387
36	± 7,58	2,433	± 1,57	— 6,90	18,444

Tabelle 8.

$e = 0{,}4875\,a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
1	± 20	1,195	± 5,81	— 1,75	1,207
2		1,215	± 5,58	— 1,90	2,211
3		1,235	± 5,35	— 2,04	3,043
4		1,255	± 5,13	— 2,14	3,706
5		1,275	± 4,92	— 2,24	4,207
6		1,295	± 4,71	— 2,31	4,573
7		1,355	± 4,14	— 2,44	5,076
8	± 10	1,195	± 7,22	— 6,16	3,580
9		1,215	± 6,57	— 6,12	6,043
10		1,235	± 5,98	— 6,03	7,620
11		1,255	± 5,47	— 5,91	8,537
12		1,275	± 5,01	— 5,78	8,819
13		1,295	± 4,60	— 5,64	8,645
14		1,315	± 4,24	— 5,49	8,094
15		1,335	± 3,92	— 5,32	7,285
16		1,355	± 3,64	— 5,17	6,232
17	± 5	1,195	± 5,72	— 10,46	6,291
18		1,215	± 4,94	— 9,82	10,009
19		1,235	± 4,31	— 9,22	12,317
20		1,255	± 3,80	— 8,67	13,145
21		1,275	± 3,37	— 8,19	12,994
22		1,295	± 3,02	— 7,74	12,217
23		1,315	± 2,71	— 7,35	10,883
24		1,335	± 2,46	— 6,97	9,229
25		1,355	± 2,24	— 6,64	7,118
26	0	1,185	0	— 13,98	4,901
27		1,195	0	— 13,26	8,445
28		1,215	0	— 12,03	12,991
29		1,235	0	— 11,01	15,184
30		1,255	0	— 10,14	15,805
31		1,275	0	— 9,41	15,345
32		1,295	0	— 8,77	14,140
33		1,315	0	— 8,21	12,324

Tabelle 8 (Fortsetzung).

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
34	0	1,335	0	— 7,72	10,203
35		1,355	0	— 7,28	7,697
36	± 20,50	1,359	± 4,09	— 2,35	5,001
37	± 12,78	1,297	± 4,86	— 4,49	6,974
38	± 11,58	1,290	± 4,90	— 4,98	7,709
39	± 8,67	1,275	± 4,74	— 6,44	9,890
40	± 7,78	1,273	± 4,56	— 6,90	10,634
41	± 5,70	1,269	± 3,85	— 8,00	12,493
42	± 2,60	1,265	± 2,09	— 9,34	14,904
43	± 1,67	1,262	± 1,39	— 9,69	15,414

Tabelle 9.

$e = 0{,}125a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
(1)	± 180	6,556	0	+ 6,13	4,631
(2)		7,340	0	+ 5,55	9,263
(3)		8,320	0	+ 4,97	13,894
(4)		9,716	0	+ 4,32	18,526
(5)	± 120	6,504	± 5,24	+ 3,95	4,631
(6)		7,240	± 4,79	+ 3,52	9,263
(7)		8,184	± 4,31	+ 3,10	13,894
(8)		9,560	± 3,76	+ 2,62	18,526
(9)	± 90	6,444	± 7,02	+ 1,09	4,631
(10)		7,124	± 6,38	+ 0,90	9,263
(11)		8,024	± 5,68	+ 0,71	13,894
(12)		9,368	± 4,89	+ 0,52	18,526
(13)	± 60	6,384	± 7,24	— 2,87	4,631
(14)		6,960	± 6,57	— 2,70	9,263
(15)		7,880	± 5,72	— 2,46	13,894
(16)		9,084	± 4,89	— 2,21	18,526
(17)	± 30	6,328	± 4,87	— 6,90	4,631
(18)		6,840	± 4,41	— 6,38	9,263
(19)		7,580	± 3,87	— 5,69	13,894
(20)		8,744	± 3,25	— 4,89	18,526

Tabelle 9.

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
(21)	0	6,284	0	— 8,76	4,631
(22)		6,800	0	— 7,98	9,263
(23)		7,480	0	— 7,15	13,894
(24)		8,608	0	— 6,09	18,526

Tabelle 10.

$e = 0{,}25a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
(1)	± 180	3,220	0	+ 4,85	4,099
(2)		3,604	0	+ 4,47	8,198
(3)		4,044	0	+ 4,06	12,296
(4)		4,608	0	+ 3,66	16,395
(5)	± 90	3,156	± 5,89	+ 1,86	4,099
(6)		3,472	± 5,44	+ 1,57	8,198
(7)		3,882	± 4,94	+ 1,27	12,296
(8)		4,466	± 4,38	+ 0,98	16,395
(9)	± 60	3,100	± 7,30	— 1,50	4,099
(10)		3,350	± 6,70	— 1,56	8,198
(11)		6,682	± 6,01	— 1,59	12,296
(12)		4,216	± 5,15	— 1,56	16,395
(13)	± 30	3,042	± 6,25	— 6,72	4,099
(14)		3,222	± 5,69	— 6,33	8,198
(15)		3,452	± 5,10	— 5,87	12,296
(16)		3,848	± 4,31	— 5,23	16,395
(17)		5,114	± 2,87	— 3,84	20,494
(18)	0	3,024	0	— 10,13	4,099
(19)		3,158	0	— 9,50	8,198
(20)		3,338	0	— 8,77	12,296
(21)		3,670	0	— 7,68	16,395
(22)		4,360	0	— 6,10	20,494
(23)	0	4,708	0	— 5,53	21,000 $= F_{\max}$

Tabelle 11.

$e = 0{,}375a$; $a = 8$; $b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
(1)	± 180	1,995	0	+ 3,42	3,074
(2)		2,185	0	+ 3,22	6,148
(3)		2,396	0	+ 3,02	9,222
(4)		2,635	0	+ 2,82	12,296
(5)	± 60	1,937	$\pm$ 6,11	+ 0,11	3,074
(6)		2,078	$\pm$ 5,68	— 0,13	6,148
(7)		2,257	$\pm$ 5,22	— 0,35	9,222
(8)		2,510	$\pm$ 4,64	— 0,55	12,296
(9)	± 30	1,889	$\pm$ 7,47	— 5,04	3,074
(10)		1,958	$\pm$ 6,97	— 4,94	6,148
(11)		2,053	$\pm$ 6,33	— 4,80	9,222
(12)		2,191	$\pm$ 5,60	— 4,58	12,296
(13)		2,500	$\pm$ 4,39	— 4,08	15,370
(14)	± 15	1,866	$\pm$ 5,64	+ 9,37	3,074
(15)		1,912	$\pm$ 5,27	— 9,01	6,148
(16)		1,972	$\pm$ 4,85	+ 8,60	9,222
(17)		2,052	$\pm$ 4,36	— 8,06	12,296
(18)		2,175	$\pm$ 3,77	— 7,38	15,370
(19)	± 5	1,901	$\pm$ 2,05	+ 11,08	6,148
(20)		1,953	$\pm$ 1,89	+ 10,50	9,222
(21)		2,014	$\pm$ 1,72	— 9,88	12,296
(22)		2,108	$\pm$ 1,52	+ 9,08	15,370
(23)		2,337	$\pm$ 1,16	— 7,55	18,444
(24)		2,515	$\pm$ 0,96	+ 6,67	18,444
(25)	0	1,858	0	— 11,94	3,074
(26)		1,898	0	— 11,41	6,148
(27)		1,947	0	+ 10,82	9,222
(28)		2,005	0	— 10,20	12,296
(29)		2,097	0	— 9,34	15,370
(30)		2,307	0	— 7,84	18,444
(31)		2,545	0	— 6,63	18,444
(32)	0	2,429	0	+ 7,17	18,801 $= F_{\max}$

Tabelle 12.

$e = 0{,}4875a \qquad a = 8; \qquad b = 4$

Nr.	φ^0	λ	y	z	$F/G\,\vartheta$
(1)	$\pm$ 20	1,222	$\pm$ 5,49	— 1,95	2,522
(2)		1,350	$\pm$ 4,19	— 2,43	5,043
(3)	$\pm$ 10	1,188	$\pm$ 7,47	— 6,16	2,522
(4)		1,205	$\pm$ 6,88	— 6,14	5,043
(5)		1,233	$\pm$ 6,02	— 6,03	7,565
(6)		1,328	$\pm$ 4,02	— 5,37	7,565
(7)	$\pm$ 5	1,182	$\pm$ 6,33	— 10,91	2,522
(8)		1,190	$\pm$ 5,93	— 10,61	5,043
(9)		1,201	$\pm$ 5,47	— 10,25	7,565
(10)		1,215	$\pm$ 4,94	— 9,82	10,087
(11)		1,239	$\pm$ 4,19	— 9,10	12,609
(12)		1,287	$\pm$ 3,14	— 7,90	12,609
(13)		1,325	$\pm$ 2,58	— 7,16	10,087
(14)		1,352	$\pm$ 2,28	— 6,70	7,565
(15)	0	1,179	0	— 14,45	2,522
(16)		1,185	0	— 13,98	5,043
(17)		1,192	0	— 13,47	7,565
(18)		1,201	0	— 12,87	10,087
(19)		1,212	0	— 12,20	12,609
(20)		1,234	0	— 11,04	15,130
(21)		1,280	0	— 9,25	15,130
(22)		1,312	0	— 8,29	12,609
(23)		1,336	0	— 7,69	10,087
(24)		1,356	0	— 7,27	7,565
(25)	0	1,255	0	— 10,14	15,805 $= F_{\max}$

II. Torsion eines geraden Stabes, dessen Querschnitt von zwei konfokalen Lemniskaten begrenzt wird.

a) Koordinatensystem.

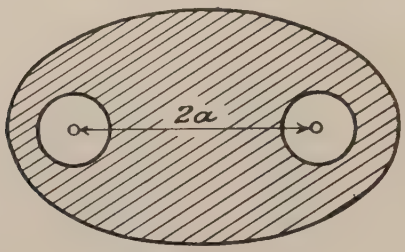

Fig. 11.

Auch diese Aufgabe läßt sich mit der im Abschnitt I angewandten Methode behandeln. Wenn die den Stabquerschnitt begrenzenden Lemniskaten den Brennpunktsabstand 2a haben, dann ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem tordierenden Moment M und dem von ihm erzeugten Drillungswinkel ϑ pro Längeneinheit des Stabes:

$$M = \zeta \cdot a^4 \cdot G \cdot \vartheta ,$$

wobei ζ einen reinen Zahlenfaktor bedeutet, der zu berechnen ist.

Wir führen als krummlinig-orthogonales Koordinatensystem die Schar der konfokalen Lemniskaten, welche die Begrenzung des Stabquerschnittes enthält, und die zu ihr orthogonale Hyperbelschar ein. Den Maßstab wählen wir so, daß der halbe Brennpunktsabstand gleich der Einheit wird.

Mit den aus der Fig. 12 abzulesenden Bezeichnungen gilt jetzt als Gleichung der Lemniskaten:

$$R \cdot r = \text{const.}\, \lambda$$

und als Gleichung der Hyperbeln:

$$\mu_1 + \mu_2 = \text{const.}\, \varphi .$$

Ferner finden wir:

$$y + 1 = R \cdot \cos \mu_1 .$$
$$y - 1 = r \cdot \cos \mu_2 ,$$

und

$$z = R \cdot \sin \mu_1 ,$$
$$z = r \cdot \sin \mu_2 .$$

Dieses ergibt durch Multiplikation:

$$y^2 - z^2 - 1 = R \cdot r \cdot \cos(\mu_1 + \mu_2) = \lambda \cdot \cos\varphi$$

und durch Addition:

$$2yz = \frac{1}{2}\Big[(y+1)z + (y-1)z + \lambda \cdot \sin\varphi\Big] = \lambda \cdot \sin\varphi\,.$$

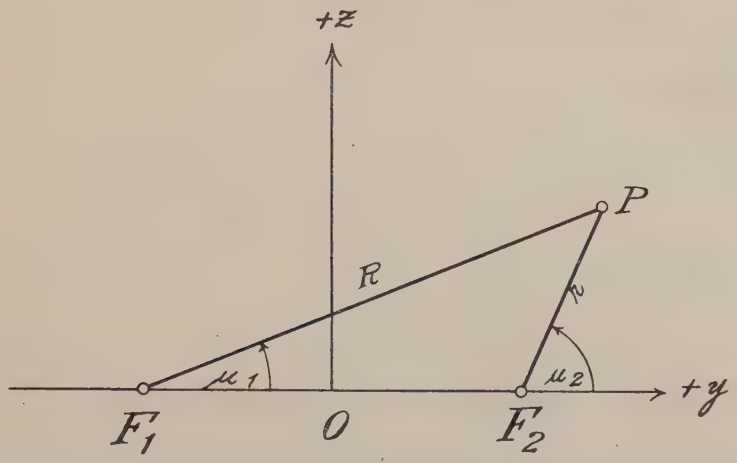

Fig. 12.

Aus diesen beiden Gleichungen finden wir die gesuchten Beziehungen zwischen den gerad- und krummlinigen Koordinaten:

$$\left.\begin{matrix} y^2 \\ z^2 \end{matrix}\right\} = \pm\frac{1+\lambda\cos\varphi}{2} \Big(\pm\Big)\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda^2+2\lambda\cos\varphi}\,,$$

oder:

$$y^2 + z^2 = \sqrt{1+\lambda^2+2\lambda\cos\varphi} = w\,.$$

Wir wollen zunächst den Laplaceschen Operator Δf in unseren krummlinigen Koordinaten berechnen. Wir finden durch Differentiation aus den eben angeschriebenen Gleichungen:

$$2y\cdot\frac{\partial z}{\partial\lambda} + 2z\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda} = \sin\varphi;\; 2y\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda} + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial\lambda} = \frac{\lambda+\cos\varphi}{w}.$$

$$2y\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \lambda\cdot\cos\varphi;\; 2y\frac{\partial y}{\partial\varphi} + 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\frac{\lambda\cdot\sin\varphi}{w}.$$

Wir multiplizieren die beiden Gleichungen der ersten Reihe miteinander:

$$4yz\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2\right]+4\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \lambda}(y^2+z^2)=\frac{1}{w}(\lambda+\cos\varphi)\sin\varphi$$

und addieren sie:

$$2(y+z)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)=\frac{\lambda+\cos\varphi}{w}+\sin\varphi\,.$$

Von dem Quadrat dieser Gleichung ziehen wir die vorige ab und erhalten:

$$4(y^2+z^2)\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2\right]+16yz\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{dz}{\partial \lambda}=\frac{(\lambda+\cos\varphi)^2}{w^2}+\sin^2\varphi\,.$$

Unter Berücksichtigung der vorvorigen Gleichung geht dieses über in:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2=\frac{1}{4w}=\alpha^2\,.$$

Analog ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=\frac{\lambda^2}{4w}=\beta^2\,.$$

Aus den beiden linken Differentiationsgleichungen folgt ferner:

$$2y\cdot\frac{\partial z}{\partial \lambda}=\sin\varphi-2z\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\,,$$

$$2y\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\lambda\cdot\cos\varphi-2z\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\,.$$

Dies setzen wir in die beiden rechten ein:

$$2y^2\frac{\partial y}{\partial \lambda}+z\left(\sin\varphi-2z\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)=y\left(\frac{\lambda+\cos\varphi}{w}\right),$$

$$2y^2\frac{\partial y}{\partial \varphi}+z\left(\lambda\cos\varphi-2z\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=-y\frac{\lambda\sin\varphi}{w}\,.$$

Wir ordnen die beiden Gleichungen, wobei wir berücksichtigen, daß

$$y^2-z^2=1+\lambda\cos\varphi$$

ist, und erhalten:

$$2\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}(1+\lambda\cos\varphi)=-z\sin\varphi+y\left(\frac{\lambda+\cos\varphi}{w}\right),$$

$$2\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}(1+\lambda\cos\varphi)=-z\lambda\cos\varphi-y\frac{\lambda\sin\varphi}{w}\,.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation:

$$4(1+\lambda\cos\varphi)^2\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-y^2\frac{(\lambda+\cos\varphi)\sin\varphi}{w^2}+z^2\lambda\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+\frac{y\cdot z}{w}[\lambda\sin^2\varphi-(\lambda+\cos\varphi)\lambda\cos\varphi].$$

Analog ergibt sich:

$$4(1+\lambda\cos\varphi)^2\cdot\frac{\partial z}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-z^2\frac{(\lambda+\cos\varphi)\lambda\sin\varphi}{w^2}+y^2\lambda\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+\frac{y\cdot z}{w}[\lambda\sin^2\varphi-(\lambda+\cos\varphi)\lambda\cos\varphi].$$

Für den Laplaceschen Operator findet man hieraus:

$$\Delta\mathfrak{f}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\varphi^2}.$$

Für die Schubspannungen erhalten wir aus der Spannungsfunktion F:

$$\tau_y=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$
$$\tau_z=-\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{\partial F}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Daraus ergibt sich für das Moment M der Schubspannungen um die Stabachse:

$$\frac{M}{a^4}=-\int\left[\frac{\partial F}{\partial\lambda}\left(y\frac{\partial\lambda}{\partial y}+z\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]d\mathfrak{f}.$$

Nun ist:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2(z\sin\varphi+y\cos\varphi),$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial z}=2(y\sin\varphi-z\cos\varphi),$$
$$\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2(z\cos\varphi-y\sin\varphi),$$
$$\lambda\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2(y\cos\varphi+z\sin\varphi).$$

Hieraus finden wir:

$$y\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z}=2[2yz\sin\varphi+(y^2-z^2)\cos\varphi]=2(\lambda+\cos\varphi)=2w\frac{\partial w}{\partial\lambda};$$
$$y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial\varphi}{\delta z}=\frac{2}{\lambda}[2yz\cos\varphi-(y^2-z^2)\sin\varphi]=-\frac{2}{\lambda}\sin\varphi=\frac{2\cdot w}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}.$$

Das Flächenelement df bestimmt sich zu:

$$df = \frac{\lambda d\lambda d\varphi}{4w},$$

so daß sich ergibt:

$$\frac{M}{a^4} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{2\pi} \lambda d\lambda d\varphi \left(\frac{\partial w}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right).$$

b) Bestimmung der Spannungsfunktion F.

Wir wenden uns nun zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\vartheta.$$

F muß die Randbedingungen erfüllen

auf der inneren Begrenzung $(\lambda = \lambda_1): F = 0$,

auf der äußeren Begrenzung $(\lambda = \lambda_2): F = \text{const.} = c \cdot G\vartheta \cdot \pi$.

Wir führen ein:

$$\Omega = \frac{2F \cdot \pi}{G\vartheta} = \mathfrak{f}(y,z) - \pi(y^2 + z^2) = \mathfrak{f}(\lambda, \varphi) - \pi \cdot w.$$

F genügt der Differentialgleichung, wenn

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \varphi^2} = 0$$

ist. Dies erreichen wir durch den Ansatz:

$$\mathfrak{f} = A_0 + B_0 ln\lambda + \sum_1^{\infty} (A_n \lambda^n + B_n \lambda^{-n}) \cos n\varphi + \sum_1^{\infty} (C_n \lambda^n + D_n \lambda^{-n}) \sin n\varphi.$$

Die Koeffizienten $A \ldots D$ bestimmen wir so, daß die Randbedingungen erfüllt werden. Wir entwickeln dazu:

$$\pi \cdot w = \pi \sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\varphi} = \frac{1}{2} a_{0(\lambda)} + \sum_1^{\infty} a_{n(\lambda)} \cos n\varphi$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleichung die Bedingungen:

$$A_0 + B_0 ln\lambda_1 = \frac{1}{2} a_{0(\lambda_1)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_n \lambda_1^n + B_n \lambda_1^{-n} = a_{n(\lambda_1)},$$

$$\text{und:}\quad A_0 + B_0 \ln \lambda_2 = c + \frac{1}{2} a_{0(\lambda_2)}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$A_n \lambda_2^n + B_n \lambda_2^{-n} = a_{n(\lambda_2)}.$$

Die C_n und D_n sind Null, da die Entwicklung der Funktion $\pi \cdot w$ nur Cosinus-Terme enthalten kann.

Die Werte a_n lauten:

$$a_0 = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\varphi}\, d\varphi,$$

$$a_n = \int_0^{\lambda\pi} \sqrt{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos\varphi}\, \cos n\varphi\, d\varphi.$$

Ihre Berechnung kann leicht auf vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Art zurückgeführt werden. Mit der Substitution

$$\cos\varphi = 1 - 2\sin^2\chi;\ \chi = \frac{\varphi}{2}$$

kommt ohne weiteres:

$$a_0 = 4(1+\lambda) \cdot E_{(\varkappa)};$$

dabei bedeutet:

$$\varkappa^2 = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}.$$

Analog kann man schreiben:

$$a_n = 4(1+\lambda) \cdot G_{n(\varkappa)},$$

wobei

$$G_{n(\varkappa)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\chi}\, \cos 2n\chi\, d\chi$$

gesetzt ist.

Man erhält also für $n \neq 0$:

$$A_n \lambda_1^n + B_n \lambda_1^{-n} = 4(1+\lambda_1) \cdot G_{n(\varkappa_1)},$$
$$A_n \lambda_2^n + B_n \lambda_2^{-n} = 4(1+\lambda_2) \cdot G_{n(\varkappa_2)}$$

und hieraus:

$$A_n = \frac{4}{\lambda_2^{2n} - \lambda_1^{2n}} [\lambda_2^n (1+\lambda_2) \cdot G_{n(\varkappa_2)} - \lambda_1^n (1+\lambda_1) \cdot G_{n(\varkappa_1)}],$$

$$B_n = -\frac{4\lambda_1^{2n}\lambda_2^{2n}}{\lambda_2^{2n} - \lambda_1^{2n}} \left[\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2^n} \cdot G_{n(\varkappa_2)} - \frac{1+\lambda_1}{\lambda_1^n} \cdot G_{n(\varkappa_1)} \right].$$

Ferner ergibt sich:

$$A_0 = 2(1+\lambda_1)\cdot E_{(\varkappa_1)} - B_0 ln\,\lambda_1$$

und

$$c = -2(1+\lambda_2)\cdot E_{(\varkappa_2)} + A_0 + B_0 ln\,\lambda_2$$

oder

$$c = -2[(1+\lambda_2)\cdot E_{(\varkappa_2)} - (1+\lambda_1)\cdot E_{(\varkappa_1)}] + B_0 ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

so daß schließlich nur noch B_0 zu ermitteln bleibt. Dazu dient der Satz von Stokes. Darnach ist:

$$\oint_{\text{äußere Begrenz. des Querschnittes}} \tau\, ds = 2\,G\,\vartheta \times \text{Querschnittsfläche } S_0 \text{ der äußeren Begrenzung.}$$

An der äußeren Begrenzung ist aber:

$$\tau = 2\cdot\sqrt{w_{(\lambda_2)}}\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2} = \frac{G\,\partial}{\pi}\sqrt{w_{(\lambda_2)}}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2};$$

$$ds = \frac{\lambda_2}{2\cdot\sqrt{w_{(\lambda_2)}}}\,d\varphi,$$

so daß sich ergibt:

$$\int_0^{4\pi} \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_2} d\varphi = 4\pi\cdot S_0\,.$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \frac{B_0}{\lambda} + \sum_1^{\infty} n\,(A_n \lambda^{n-1} - B_n \lambda^{-n-1})\cos n\varphi - \pi\cdot\frac{\lambda+\cos\varphi}{w},$$

und man erhält daher:

$$4\pi\cdot B_0 - \pi\int_0^{4\pi} \lambda_2 \frac{\lambda_2+\cos\varphi}{w}\,d\varphi = 4\pi\cdot S_0,$$

denn es ist

$$\int_0^{4\pi} \cos n\varphi\, d\varphi = 0\,.$$

Also wird

$$B_0 = S_0 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \lambda_2 \frac{\lambda_2+\cos\varphi}{w}\,d\varphi\,.$$

Beachtet man die Identität:

$$\frac{\cos\varphi}{w} = -\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}\cdot\frac{1}{w} + \frac{1}{2\lambda}\cdot w\,,$$

so ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi}\lambda_2\frac{\lambda_2+\cos\varphi}{w}d\varphi = \lambda_2^2\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{w} - \frac{1+\lambda_2^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{w} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} w\,d\varphi$$

$$= \frac{\lambda_2^2-1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{w} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} w\,d\varphi = 2(\lambda_2-1)\cdot K_{(\varkappa_2)} + 2(\lambda_2+1)\cdot E_{\varkappa(\varkappa_2)}\,.$$

Damit wird endgültig:

$$B_0 = S_0 + (\lambda_2-1)\cdot K_{(K_2)} + (\lambda_2+1)\cdot E_{(K_2)}\,,$$

worin sich S_0 bestimmt zu:

$$S_0 = 2\cdot\lambda_2\cdot E_{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}\,.$$

c) Das Moment der Schubspannungen um die Stabachse.

Aus dem Ausdruck für das Moment $\frac{M}{a^4}$ der Schubspannungen um die Stabachse wird beim Ersatz von F durch Ω:

$$\frac{M\cdot 2\pi}{a^4\cdot G\vartheta} = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\right)\lambda\,d\lambda\,d\varphi\,.$$

Mit $\Omega = \mathfrak{f}(\lambda,\varphi) - \pi\cdot w$ und $\frac{M}{a^4\cdot G\vartheta} = \zeta$

wird also:

$$2\pi\zeta = \pi\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2\right]\lambda\,d\lambda\,d\varphi - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial w}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\varphi}\right]\lambda\,d\lambda\,d\varphi\,.$$

Es ist:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2 = 1\,.$$

Ferner gilt:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}\lambda\, d\lambda\, d\varphi=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}\lambda\cdot w\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\varphi-\int_0^{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}w\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}\right)d\lambda\, d\varphi;$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{\lambda}\,d\lambda\, d\varphi=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot w\right]_0^{2\pi}d\varphi-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{\lambda\pi}w\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}\right)d\varphi\, d\lambda.$$

Da $\mathfrak{f}(\lambda, \varphi)$ der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \lambda_2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \varphi^2}=0$$

genügt, ist die Summe der zweiten Integrale auf der rechten Seite gleich Null. Ferner da

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}=-\sum_1^{\infty}n(A_n\lambda^n+B_n\lambda^{-n})\sin n\varphi$$

ist, wird

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot w\right]_0^{2\pi}=0.$$

Es ergibt sich daher:

$$2\pi\zeta=\pi\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\lambda\, d\lambda\, d\varphi-\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}\cdot\lambda\cdot w\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\varphi.$$

Ferner ist:

$$\lambda\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}=B_0+\sum_1^{\infty}n(A_n\lambda^n-B_n\lambda^{-n})\cos n\varphi;$$

damit wird:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \lambda}\lambda\cdot w\right]d\varphi=B_0\int_0^{2\pi}w\, d\varphi+\sum_1^{\infty}n(A_n\lambda^n-B_n\lambda^{-n})\cdot\int_0^{2\pi}w\cdot\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$=4(1+\lambda)B_0\cdot E_{(\varkappa)}+4(1+\lambda)\cdot\sum_1^{\infty}n(A_n\lambda^n-B_n\lambda^{-n})\cdot G_{n(\varkappa)}.$$

Man erhält also:

$$2\pi\cdot\zeta=\pi^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)-4B_0\left[(1+\lambda_2)\cdot E_{(K_2)}-(1+\lambda_1)\cdot E_{(\varkappa_1)}\right]$$

$$-4\cdot\sum_1^{\infty}nA_n\left[\lambda_2^n(1+\lambda_2)\cdot G_{n(\varkappa_2)}-\lambda_1^n(1+\lambda_1)\cdot G_{n(\varkappa_1)}\right]$$

$$+4\cdot\sum_1^{\infty}nB_n\left[\frac{1+\lambda_2}{\lambda_2^n}\cdot G_{n(\varkappa_2)}-\frac{1+\lambda_1}{\lambda_1^n}\cdot G_{n(\varkappa_1)}\right].$$

Mit Hilfe der angegebenen Werte für A_n und B_n kann man ζ in der Form darstellen:

$$\zeta = \frac{\pi}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) - 2\frac{B_0}{\pi}\left[(1+\lambda_2)\cdot E_{(\varkappa_2)}) - (1+\lambda_1)\cdot E_{(\varkappa_1)}\right]$$

$$- \frac{8}{\pi}(1+\lambda_1)^2 \cdot \sum_1^{\infty} n \frac{\lambda_2^{2n} + \lambda_1^{2n}}{\lambda_2^{2n} - \lambda_1^{2n}} \cdot G^2_{n(\varkappa_1)} - \frac{8}{\pi}(1+\lambda_2)^2 \cdot \sum_1^{\infty} n \frac{\lambda_2^{2n} + \lambda_1^{2n}}{\lambda_2^{2n} - \lambda_1^{2n}} G^2_{n(\varkappa_2)}$$

$$+ \frac{32}{\pi}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) \cdot \sum_1^{\infty} n \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2^n}{\lambda_2^{2n} - \lambda_1^{2n}} \cdot G_{n(\varkappa_1)} \cdot G_{n(\varkappa_2)} \cdot$$

d) Zahlenbeispiele.

Als Zahlenbeispiel wurde der Fall $a = 5$, $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 2$ durchgerechnet. Wir fanden dabei:

$$\varkappa_1^2 = \varkappa_2^2 = \frac{8}{9}$$

und

$$\begin{aligned} G_{n(\varkappa_1)} = G_{n(\varkappa_2)} &= +\,0{,}253 \quad \text{für } n = 1 \\ &= -\,0{,}0303 \quad ,, \; n = 2 \\ &= +\,0{,}0072 \quad ,, \; n = 3 \\ &= -\,0{,}0018 \quad ,, \; n = 4. \end{aligned}$$

Hieraus berechnen sich die Koeffizienten:

$A_0 = +\,11{,}483;$	$B_0 = +\,11{,}744$
$A_1 = +\;\;1{,}418;$	$B_1 = +\;\;0{,}405$
$A_2 = -\;\;0{,}088;$	$B_2 = -\;\;0{,}040$
$A_3 = +\;\;0{,}011;$	$B_3 = +\;\;0{,}0053$
$A_4 = -\;\;0{,}0014;$	$B_4 = -\;\;0{,}0007$
$c = +\,12{,}939;$	$\zeta = -\;\;7{,}90.$

In der Fig. 14 sind die Spannungslinien dargestellt; die Fig. 13 zeigt die dazu notwendige Hilfsfigur. In den Tabellen 13 und 14 sind die Spannungskoten und Koordinaten verzeichnet.

Zur leichteren Durchrechnung für andere λ-Werte kann die folgende Aufstellung dienen.

$$\varkappa^2 = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} = \frac{4\cdot\frac{1}{\lambda}}{(1+\frac{1}{\lambda})^2}$$

		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	B_0
$\lambda = 1{,}7$	$G_{n(\varkappa)}$	$= +\,0{,}278$	$= -\,0{,}0388$	$= +\,0{,}0111$	$= -\,0{,}0040$	$+\;\;9{,}686$
$\lambda = 2{,}3$		$= +\,0{,}232$	$= -\,0{,}0238$	$= +\,0{,}0040$	$= -\,0{,}0002$	$+\,13{,}749$

Tabelle 13.

Nr.	φ^0	λ	y	z	$\frac{c}{2\pi}-\frac{F}{G\vartheta}=(F)$
1	0	1,75	—	—	0,167
2		1,5	—	—	0,372
3		1,25	—	—	0,629
4		1,0	—	—	0,960
5		0,75	—	—	1,406
6	120	1,75	—	—	0,128
7		1,5	—	—	0,302
8		1,25	—	—	0,537
9		1,0	—	—	0,864
10		1,75	—	—	1,335
11	150	1,75	—	—	0,089
12		1,5	—	—	0,225
13		1,25	—	—	0,433
14		1,0	—	—	0,752
15		0,75	—	—	1,257
16	180	1,75	—	—	0,052
17		1,5	—	—	0,149
18		1,25	—	—	0,305
19		1,0	—	—	0,546
20		0,75	—	—	1,173
21	170,19	1,115	$\pm$ 1,20	$\pm$ 1,98	0,465
22	170,55	1,178	$\pm$ 1,06	$\pm$ 2,28	0,395

Tabelle 14.

Nr.	φ^0	λ	y	z	$\frac{c}{2\pi}-\frac{F}{G\vartheta}=(F)$
(1)	0	1,463	$\pm$ 7,85	0	0,412
(2)		1,100	$\pm$ 7,25	0	0,824
(3)		0,839	$\pm$ 6,78	0	1,236
(4)		0,657	$\pm$ 6,44	0	1,648
(5)	120	1,373	$\pm$ 4,39	$\pm$ 3,38	0,412
(6)		1,029	$\pm$ 4,33	$\pm$ 2,57	0,824
(7)		0,793	$\pm$ 4,36	$\pm$ 1,97	1,236
(8)		0,640	$\pm$ 4,41	$\pm$ 1,57	1,648
(9)	150	1,270	$\pm$ 2,60	$\pm$ 3,05	0,412
(10)		0,955	$\pm$ 2,92	$\pm$ 2,05	0,824
(11)		0,760	$\pm$ 3,27	$\pm$ 1,46	1,236
(12)		0,626	$\pm$ 3,56	$\pm$ 1,10	1,648
(13)	180	1,124	0	$\pm$ 1,76	0,412
(14)		0,870	$\pm$ 1,80	0	0,824
(15)		0,733	$\pm$ 2,58	0	1,236
(16)		0,613	$\pm$ 3,11	0	1,648

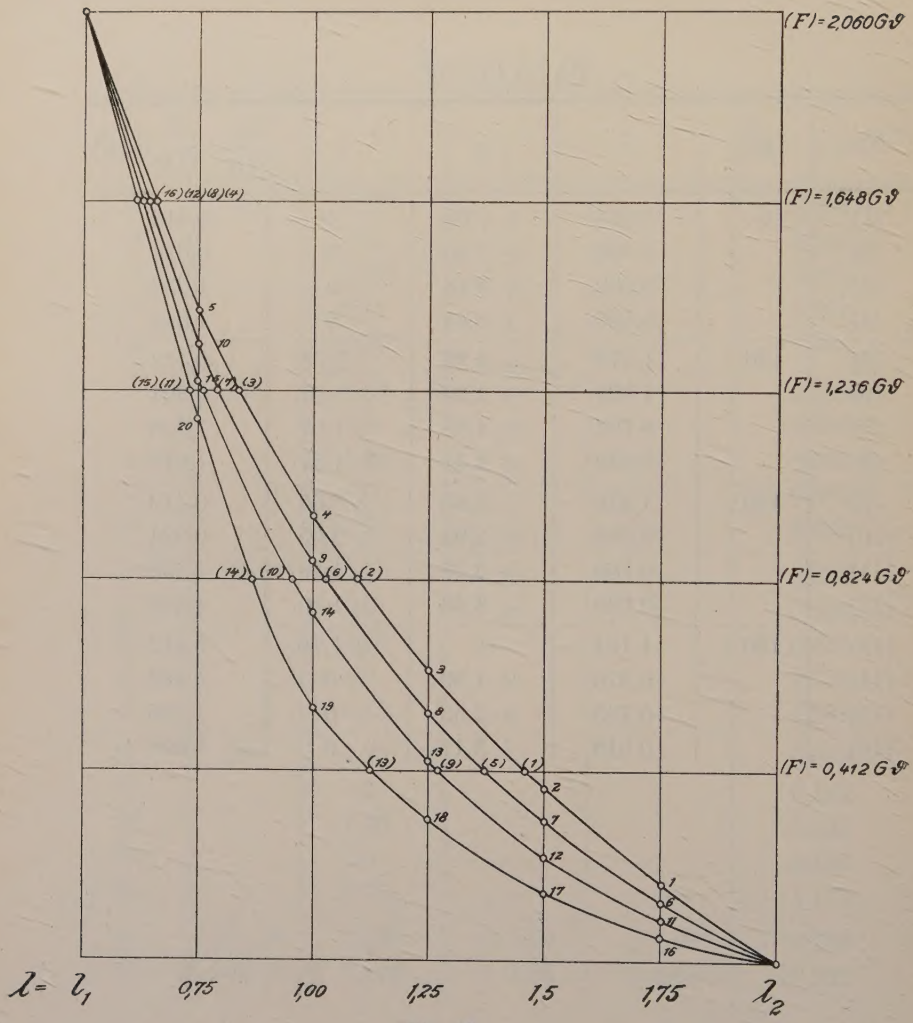
(F) = 2,060 Gϑ
(F) = 1,648 Gϑ
(F) = 1,236 Gϑ
(F) = 0,824 Gϑ
(F) = 0,412 Gϑ
λ = l1
0,75
1,00
1,25
1,5
1,75
λ2

Fig. 13

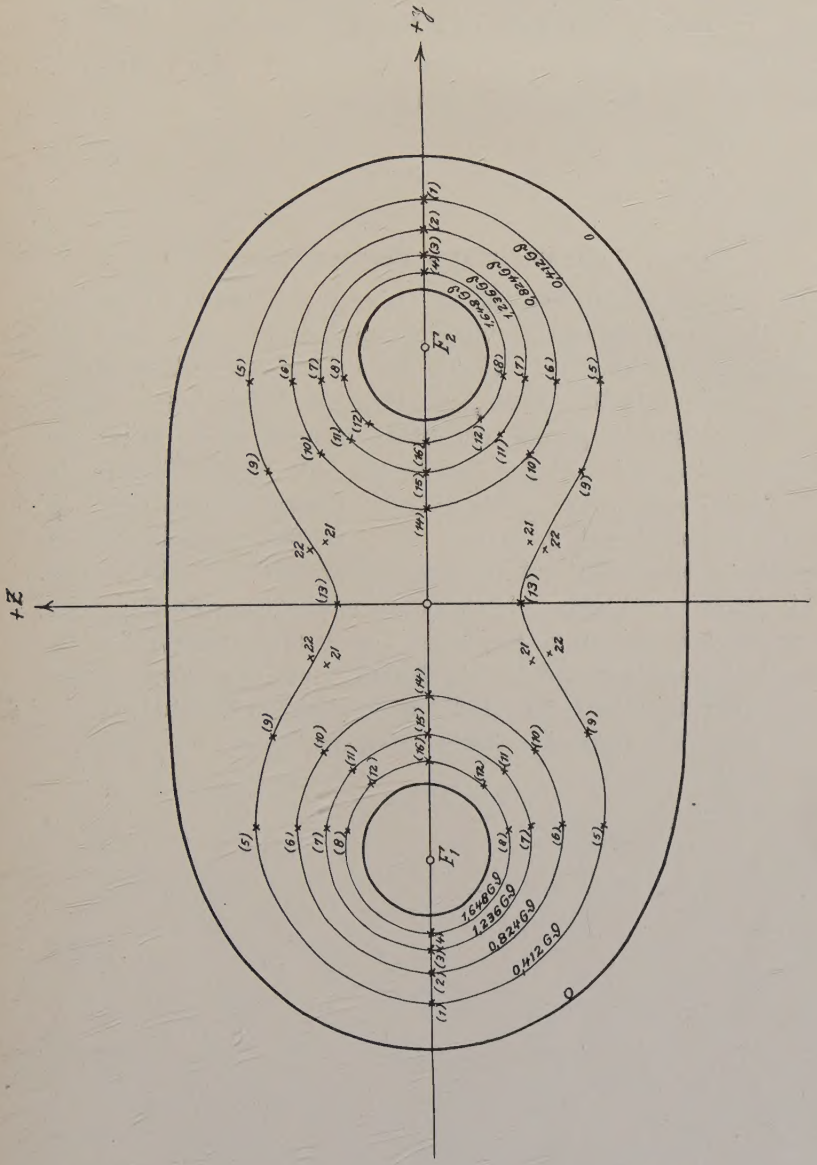

Fig. 14

Literatur-Verzeichnis.

Föppl, Drang und Zwang, 2. Bd., München 1920.

Lamé, Leçons sur les coord. curvilignes et leurs div. applic., Paris 1857.

Jahnke, Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1923.

Lebenslauf des Verfassers.

Ich bin am 30. Januar 1898 zu Doberau i. M. geboren, besuchte das dortige humanistische Gymnasium und erwarb im Jahre 1915 das Reifezeugnis. Von 1915—1919 genügte ich meiner Militärpflicht. Vom 1. Oktober 1919 bis zum 30. September 1920 war ich als Ingenieur-Eleve beim Vermessungsamte der Stadt Rostock tätig. Daran anschließend studierte ich an der Technischen Hochschule München das Vermessungs-Ingenieur-Fach. Als Abschluß erwarb ich dort den Grad eines Diplom-Ingenieurs im Jahre 1923. Darauf war ich als Vermessungsreferendar im Mecklenburg-Schwerinschen Staatsdienst tätig. Am 14. Oktober 1925 bestand ich in Schwerin die höhere Staatsprüfung und wurde daraufhin zum beeideten Vermessungsingenieur für das Staatsgebiet Mecklenburg-Schwerin bestellt und zum Vermessungsassessor ernannt. Von Ostern 1924 bis Michaelis 1925 studierte ich an der Universität Rostock nebenher Mathematik.